

Anwendung der Methode der Korrelationsfunktion auf die Berechnung der Richtungsabhängigkeit von H_{c2} im kubischen Einkristall *

KLAUS-DIETER HARMS

Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen

(Z. Naturforsch. 25 a, 1161—1168 [1970]; eingegangen am 3. Juni 1970)

The upper critical magnetic field for a monocrystalline superconductor with cubic symmetry is calculated using the *Method of the Correlation Function*. The symmetry of the system leads to an eigenvalue equation which is solved with perturbation-theoretic methods. The upper critical field is calculated for dirty superconductors in the lowest order for which anisotropy is present. For clean superconductors, a higher order is calculated. Some results are critically compared with those in a paper by HOHENBERG and WERTHAMER.

Beobachtungen an monokristallinen Supraleitern 2. Art lassen eine Anisotropie des oberen kritischen Magnetfeldes erkennen, die vom betrachteten Material, von der Temperatur und vom Verunreinigungsgrad abhängt^{1, 2}. Theoretisch wurde dieses Verhalten näherungsweise von HOHENBERG und WERTHAMER behandelt³, sie betrachteten den Fall eines Metallgitters mit kubischer Symmetrie, der z. B. bei den Supraleitern 2. Art V und Nb vorliegt. Einen weiteren Zugang zum Verständnis des genannten Effekts liefert die von LÜDERS aus einem von DE GENNES stammenden Ansatz entwickelte „Methode der Korrelationsfunktion“^{4, 5}.

Bei der Herleitung dieser Methode muß man die einschränkende Voraussetzung machen, daß nur ein Leitungsband im Energiespektrum des betrachteten Metalls vorliegt⁵. Diese wichtige Bedingung für die Gültigkeit der Theorie müßte auch in der zitierten Arbeit von HOHENBERG und WERTHAMER vorausgesetzt werden, findet dort aber keine Erwähnung. Beim gegenwärtigen Wissensstand über konkrete Fermi-Flächen ist nicht immer gut nachprüfbar, ob diese Forderung im Einzelfall wirklich erfüllt ist, damit die Methode der Korrelationsfunktion angewendet werden kann, sei also im folgenden ihre Gültigkeit vorausgesetzt. Weiterhin werden in der vorliegenden Arbeit aus rechentechnischen Gründen nur Metallgitter mit kubischer Symmetrie betrachtet.

Zur Beschreibung von Streuprozessen an Verunreinigungen werden in der Methode der Korrelations-

funktion Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{\text{makro}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ eingeführt, wobei die Wellenzahlvektoren \mathbf{k}, \mathbf{k}' den Zustand supraleitender Ladungsträger charakterisieren. Indem man die kubische Gittersymmetrie und allgemeine Eigenschaften eines Streuprozesses, wie Invarianz gegenüber Zeitumkehr, ausnutzt, lassen sich für $P_{\text{makro}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ gewisse Symmetriebeziehungen ableiten [s. Abschn. 1 b)]. Diese Relationen genügen bereits, die Anisotropie von H_{c2} — im Rahmen einer störungstheoretischen Näherung — im Temperaturbereich $T \lesssim T_c$ in geschlossener Form zu berechnen, insbesondere ist es also keineswegs erforderlich, sich auf δ -förmige Streupotentiale zu beschränken (vgl. ³). Im Anschluß an diese Rechnungen [s. Abschn. 2 a), 2 b)] werden zwei spezielle Ansätze für $P_{\text{makro}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ ausgewertet, u. a. ergibt sich dabei die Übertragung des Begriffs „isotrope Streuung“ auf den Fall nicht-sphärischer Fermi-Flächen. Im Spezialfall isotroper Streuung ergibt sich für die gesuchte Anisotropie das von HOHENBERG und WERTHAMER angegebene Resultat.

Prinzipiell läßt sich mit dem Formalismus der Störungstheorie und den in Abschn. 1 a, b), 2 a, b) entwickelten Methoden die Anisotropie von H_{c2} auch in höherer Ordnung bestimmen. Der Parameter dieser Entwicklung ist die (dimensionslose) Größe $\langle v^2 \rangle T^{-2} 2e H_{c2}^{(0)}(T)$, wobei sich $H_{c2}^{(0)}(T)$ als kritisches Magnetfeld im Rahmen der Ginzburg-Landau-Theorie ermitteln läßt und $\langle v^2 \rangle$ das über die Fermi-Fläche gemittelte Quadrat der Elektronengeschwin-

* Sonderdruckanforderungen an das Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen, D-3400 Göttingen, Bunsenstraße 9.

¹ W. A. REED, E. FAWCETT, P. P. M. MEINCKE, P. C. HOHENBERG u. N. R. WERTHAMER, Proceedings of the Tenth International Conference on Low Temperature Physics 2 a, 368 [1966].

² D. E. FARRELL, B. S. CHANDRASEKHAR u. S. HUANG, Phys. Rev. 176, 562 [1968].

³ P. C. HOHENBERG u. N. R. WERTHAMER, Phys. Rev. 153, 493 [1967].

⁴ G. LÜDERS, Z. Naturforsch. 21 a, 680, 1415, 1425 [1966].

⁵ G. LÜDERS u. K. D. USADEL, erscheint demnächst.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition “no derivative works”). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

digkeit darstellt. Um die Umständlichkeit der damit verbundenen Rechnungen etwas zu mindern, wird in 3. nur der Sonderfall sauberer Supraleiter betrachtet. Es zeigt sich, daß die Winkelabhängigkeit der störungstheoretischen Entwicklung von H_{c2} in der nächsthöheren Ordnung bereits Terme enthält, deren Entwicklung nach Würfelfunktionen ("cubic harmonics") Glieder mit $l=8$ ergibt. Somit ist fraglich, ob der bei HOHENBERG, WERTHAMER und anderen mehrfach benutzte Ansatz, der nur Würfelfunktionen mit $l=4$ und $l=6$ berücksichtigt^{1,2}, zur Approximation von H_{c2} in höherer Ordnung in jedem Fall geeignet ist.

1. Die Methode der Korrelationsfunktion

a) Darstellung der Methode (nach 5)

Bei der Berechnung der Sprungtemperatur geht es darum, die Integralgleichung

$$\Delta(\mathbf{r}) = gT \sum_{\omega} \int d^3\mathbf{r}' K_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta(\mathbf{r}') \quad (1)$$

mit maximalem T nicht-trivial zu lösen. Der Integralkern ist in der Form

$$K_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2\pi \int_0^{\infty} dt e^{-2|\omega|t} \int d^3\mathbf{k} f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{r}', t) \quad (2)$$

darstellbar; dabei ist g = renormierte Kopplungskonstante, T = Sprungtemperatur, $\Delta(\mathbf{r})$ = Paarpotential, $\omega = (2n+1)\pi T$; $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $|\omega| < \omega_D$.

Außerdem wurden die Einheiten so gewählt, daß man $\hbar = c = k_B = 1$ setzen kann.

Bei verschwindendem Magnetfeld ist die Funktion $f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{r}', t)$ eine Verteilungsfunktion klassischer (bis auf die Ersetzung $m\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{k}$) Teilchen, sie ist proportional zur Teilchendichte im Phasenraum zur Zeit t , wenn zur Zeit $t=0$ an der Stelle \mathbf{r}' Teilchen mit Fermi-Energie und isotrop verteiltem \mathbf{k} gestartet sind. Also genügt $f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{r}', t)$ einer Boltzmann-Gleichung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right) f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{r}', t) = n \int d^3\mathbf{k}' P_{\text{makro}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{r}', t) - n \int d^3\mathbf{k}' P_{\text{makro}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') f(\mathbf{r}, \mathbf{k}', \mathbf{r}', t) \quad (3)$$

Die Anfangsbedingung lautet

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{r}', 0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\eta(\mathbf{k})) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4)$$

mit $\eta(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k}) - E_F$.

Dabei ist n die ortsunabhängig angenommene Konzentration von Streuzentren (= Verunreinigungen), $n P_{\text{makro}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') d^3\mathbf{k}' dt$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen an der Stelle (\mathbf{r}, \mathbf{k}) während der Zeit dt einen Streuprozess erleidet, nach dem sein Wellenzahlvektor im Intervall $d^3\mathbf{k}'$ bei \mathbf{k}' liegt [es folgt: $P_{\text{makro}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \geq 0$].

b) Symmetriebetrachtungen und Neuformulierung

Um Koordinatensysteme einzuführen, wähle man die Koordinatenachsen (im \mathbf{r} - bzw. \mathbf{k} -Raum) parallel zu den Würfelfanten der kubischen Gitterzellen (im ursprünglichen bzw. reziproken Gitter). — Aus der Definition (5) geht nun hervor, daß $P_{\text{makro}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ ein Mittelwert von quantenmechanischen Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{\text{mikro}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ sein muß, dabei wird über alle Streuzentren im Element $d^3\mathbf{r}$ gemittelt ($d^3\mathbf{r}$ enthalte nach Voraussetzung viele Elementarzellen des Gitters). Liegt jetzt ein Streuzentrum in einer kubischen Gitterzelle an einem Ort höchster Symmetrie, etwa im Mittelpunkt, so müssen die dynamischen Eigenschaften dieser Störstelle die volle Gittersymmetrie haben, d. h. es muß gelten:

$$P_{\text{mikro}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = P_{\text{mikro}}(A\mathbf{k}, A\mathbf{k}'). \quad (6)$$

Die Symmetrietransformation A ist dabei ein beliebiges Produkt der beiden „elementaren“ Abbildungen:

S_i := Spiegelung an der zur k_i - (x_i -) Achse senkrechten Koordinatenebene,

R_i := Spiegelung an der Ebene, die die k_i - (x_i -) Achse enthält und den 1. Quadranten der k_j - k_l - (x_j - x_l -) Ebene halbiert ($i \neq j \neq l$).

Liegt jedoch ein Streuzentrum nicht an einer solchen ausgezeichneten Stelle, so kann man immerhin sagen, daß es sich einen energetisch günstigen Platz R in der betroffenen kubischen Gitterzelle suchen wird. Dann sind aber die durch A aus R erzeugten „äquivalenten“ Plätze energetisch ebenso günstig, und insgesamt werden sie in den Gitterzellen in $d^3\mathbf{r}$ mit der gleichen Häufigkeit von Streuzentren besetzt sein wie R . Also ist die Symmetriebeziehung (6) zwar i. allg. für $P_{\text{mikro}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ verletzt, dagegen gilt sie weiterhin für den genannten Mittelwert (gemittelt über alle Streuzentren in $d^3\mathbf{r}$), denn nach dem gerade Gesagten bedeutet die Transformation A nur eine Umordnung der bei der Mittelbildung auftretenden Summanden. erinnert man sich noch an die

übliche Forderung der Invarianz gegenüber Zeitumkehr, so hat man insgesamt:

$$P_{\text{makro}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = P_{\text{makro}}(A\mathbf{k}, A\mathbf{k}') = P_{\text{makro}}(-\mathbf{k}', -\mathbf{k}). \quad (7)$$

Verlangt man, daß die Streuung an Störstellen elastisch ist,

$$P_{\text{makro}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = P(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta(\eta(\mathbf{k}) - \eta(\mathbf{k}')), \quad (8)$$

so kann man wegen der Anfangsbedingung (4) ansetzen:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{r}', t) = \delta(\eta(\mathbf{k})) g(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{r}', t) \quad (9)$$

und mit

$$\partial := \partial/\partial \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{k}) = \partial\eta(\mathbf{k})/\partial\mathbf{k} = \dot{\mathbf{r}}$$

folgt bei Abwesenheit äußerer Kräfte ($\dot{\mathbf{k}}=0$) aus den Gln. (3), (4):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \partial + n \int d^3\mathbf{k}' P(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta(\eta(\mathbf{k}')) \right) g(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{r}', t) - n \int d^3\mathbf{k}' P(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \delta(\eta(\mathbf{k}')) g(\mathbf{r}, \mathbf{k}', \mathbf{r}', t) = 0. \quad (10)$$

Setzt man

$$g_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{r}') := 2\pi \int_0^{\infty} dt e^{-2|\omega|t} g(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{r}', t), \quad (11)$$

$$\Delta_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) := \int d^3\mathbf{r}' g_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{r}') \Delta(\mathbf{r}'), \quad (12)$$

$$\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') := \frac{1}{v(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}')} P(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), \quad (13)$$

$$\sigma(\mathbf{k}) := \int \sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') dS' \quad (14)$$

und berücksichtigt man

$$d^3\mathbf{k} = \frac{1}{v(\mathbf{k})} d\eta dS,$$

wobei dS das Element der Fermi-Fläche ist, so folgt aus Gl. (10):

$$(2|\omega| + \mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\partial} + n v(\mathbf{k}) \sigma(\mathbf{k})) \Delta_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) - n v(\mathbf{k}) \int dS' \sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Delta_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \Delta(\mathbf{r}). \quad (15)$$

Der Übergang zu nicht-verschwindendem Magnetfeld ist in dieser Gleichung durch die Ersetzung

$$\partial \rightarrow \tilde{\partial} = \partial + 2ie\mathbf{A}(\mathbf{r})$$

vollzogen worden. Dabei ist $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ein Vektorpotential für das äußere Magnetfeld $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ ^{4, 5}, die Elementarladung ist $-e$. Unter Berücksichtigung der Gln. (2), (9), (11), (12) läßt sich die Lückengleichung (1) in der Form

$$\Delta(\mathbf{r}) = gT \sum_{\omega} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} \Delta_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad (16)$$

schreiben. Die Methode der Korrelationsfunktion führt also auf die Aufgabe, das gekoppelte Gleichungssystem (15), (16) zu lösen. Man beachte, daß wegen der Invarianz von $\eta(\mathbf{k})$, $v(\mathbf{k})$, dS gegenüber der Transformation A aus den Gln. (7), (13), (14) folgt:

$$\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sigma(A\mathbf{k}, A\mathbf{k}') = \sigma(\mathbf{k}', \mathbf{k}), \quad \sigma(\mathbf{k}) = \sigma(A\mathbf{k}). \quad (17)$$

2. Anisotropie von H_{c2} im verunreinigten Supraleiter (niedrigste Näherung)

a) Die Lösung der Boltzmann-Gleichung

Um das System (15), (16) zu lösen, berechnet man aus Gl. (16) $\Delta_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ in Abhängigkeit von $\Delta(\mathbf{r})$ und setzt das Resultat in Gl. (15) ein. Gleichung (16) ist äquivalent zu

$$(2|\omega| + n v(\mathbf{k}) \sigma(\mathbf{k})) \Delta_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad (18)$$

$$- n v(\mathbf{k}) \int \sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Delta_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}') dS' = \frac{1}{(2\pi)^2} \Delta(\mathbf{r}),$$

$$(2|\omega| + n v(\mathbf{k}) \sigma(\mathbf{k})) \Delta_{\omega}^{(\mu)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) - n v(\mathbf{k}) \int \sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Delta_{\omega}^{(\mu)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}') dS' = - \mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\partial} \Delta_{\omega}^{(\mu-1)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad (19)$$

mit

$$\Delta_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \Delta_{\omega}^{(\mu)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}). \quad (20)$$

Bricht man die – vermutlich semikonvergente – Entwicklung in Gl. (20) nach endlich vielen Gliedern ab, so erhält man eine angenäherte Lösung des Problems, deren Gültigkeit nur im GINZBURG-LANDAU-Temperaturbereich $T \lesssim T_c$ gewährleistet ist. – Man überzeugt sich leicht davon, daß die Gln. (18), (19) eindeutig lösbar sind. Gl. (18) wird offenbar durch

$$\Delta_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2 2|\omega|} \Delta(\mathbf{r}) \quad (21)$$

befriedigt, während für Gl. (19) der Ansatz (über mehrfach auftretende Indizes wird hier und im folgenden summiert)

$$\Delta_{\omega}^{(\mu)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = V_{s_1 s_2 \dots s_{\mu}}(\mathbf{k}) \tilde{\partial}_{s_1} \tilde{\partial}_{s_2} \dots \tilde{\partial}_{s_{\mu}} \Delta_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \quad (22)$$

auf Integralgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten führt:

$$(2|\omega| + n v(\mathbf{k}) \sigma(\mathbf{k})) V_i(\mathbf{k}) - n v(\mathbf{k}) \int dS' \sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') V_i(\mathbf{k}') = -v_i(\mathbf{k}), \quad (23)$$

$$(2|\omega| + n v(\mathbf{k}) \sigma(\mathbf{k})) V_{ij}(\mathbf{k}) - n v(\mathbf{k}) \int dS' \sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') V_{ij}(\mathbf{k}') = -v_i(\mathbf{k}) V_j(\mathbf{k}) \quad (24)$$

etc. Durch Einsetzen verifiziert man ohne Mühe:

$$\begin{aligned} V_i(\mathbf{k}) &= \Omega \frac{-v_i(\mathbf{k})}{2|\omega| + n v(\mathbf{k}) \sigma(\mathbf{k})} \\ V_{ij}(\mathbf{k}) &= \Omega \left(\frac{-v_i(\mathbf{k})}{2|\omega| + n v(\mathbf{k}) \sigma(\mathbf{k})} \right. \\ &\quad \cdot \Omega \frac{-v_j(\mathbf{k})}{2|\omega| + n v(\mathbf{k}) \sigma(\mathbf{k})} \left. \right) \end{aligned} \quad (25)$$

etc., dabei ist

$$\Omega = \frac{1}{1 - \omega} := \sum_{\mu=0}^{\infty} \omega^{\mu}, \quad (26)$$

$$\omega f(\mathbf{k}) := \frac{n v(\mathbf{k})}{2|\omega| + n v(\mathbf{k}) \sigma(\mathbf{k})} \int dS' \sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') f(\mathbf{k}').$$

Die in Gl. (25) auftretenden Reihen konvergieren für beliebige n , $v(\mathbf{k})$, $\sigma(\mathbf{k})$, sie haben geometrische Reihen als Majoranten. – Ausdrücklich sei bemerkt, daß $V_i(\mathbf{k})$, $V_{ij}(\mathbf{k})$, etc. Funktionen von ω sind.

Man betrachte eine Symmetrietransformation A [vgl. Abschn. 1 b)] und den dazugehörigen Operator \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} f(\mathbf{k}) := f(A^{-1} \mathbf{k}).$$

Aus der kubischen Symmetrie der Größen $v(\mathbf{k})$, dS und aus Gl. (17) erhält man leicht $[\mathbf{A}, \omega] = 0$, also ist auch

$$[\mathbf{A}, \Omega] = 0.$$

Auf Grund von Gl. (25) ersieht man daraus, daß die Größen $V_i(\mathbf{k})$, $V_{ij}(\mathbf{k})$ etc. bei Anwendung von \mathbf{A} dasselbe Symmetrieverhalten zeigen wie die Produkte $v_i(\mathbf{k})$, $v_i(\mathbf{k}) v_j(\mathbf{k})$ etc. Wegen

$$\mathbf{A} v_i(\mathbf{k}) = v_i(A^{-1} \mathbf{k}) = \frac{\partial \eta(A^{-1} \mathbf{k})}{\partial (A^{-1} \mathbf{k})_i} = \frac{\partial \eta(\mathbf{k})}{\partial (A^{-1} \mathbf{k})_i}$$

erhält man also allgemein (\mathbf{S}_i , \mathbf{R}_i sind die zu S_i , R_i gehörigen Operatoren):

$$\mathbf{S}_i V_{s_1 s_2 \dots s_{\mu}}(\mathbf{k}) = (-1)^{\sigma_i} V_{s_1 s_2 \dots s_{\mu}}(\mathbf{k}). \quad (27)$$

Dabei ist σ_i die Anzahl der Gleichungen $s_j = i$.

$$\mathbf{R}_i V_{s_1 s_2 \dots s_{\mu}}(\mathbf{k}) = V_{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \dots \bar{s}_{\mu}}(\mathbf{k}) \quad (28)$$

mit $i \neq s_j \neq \bar{s}_j$ oder $i = s_j = \bar{s}_j$, $j = 1, \dots, r$.

$$\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3 V_{s_1 s_2 \dots s_{\mu}}(\mathbf{k}) = (-1)^{\mu} V_{s_1 s_2 \dots s_{\mu}}(\mathbf{k}), \quad (29)$$

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 V_{s_1 s_2 \dots s_{\mu}}(\mathbf{k}) = V_{s_1+1, s_2+1, \dots, s_{\mu}+1}(\mathbf{k}) \quad (30)$$

(Indizes mod 3). Betrachtet man Integrale der Form [s. Abschn. 2 b)]

$$\int dS f(\mathbf{k}) V_{s_1 s_2 \dots s_{\mu}}(\mathbf{k}), \quad (31)$$

wobei $f(\mathbf{k}) = f(A \mathbf{k})$ sei, so liefert die Substitution $\mathbf{k} \rightarrow A^{-1} \mathbf{k}$:

$$(32)$$

$$\int dS f(\mathbf{k}) V_{s_1 s_2 \dots s_{\mu}}(\mathbf{k}) = \int dS f(\mathbf{k}) \mathbf{A} V_{s_1 s_2 \dots s_{\mu}}(\mathbf{k}).$$

Man erhält also mit den Gln. (27), (28), (29), (30) nützliche Informationen über die verschiedenen Integrale der Form (31).

b) Die Lösung der Lückengleichung

Setzt man die in den Gln. (20), (21), (22), (25) definierte Lösung der Boltzmann-Gleichung in die Lückengleichung [Gl. (16)] ein, so hat man

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}) &= g T \sum_{\omega} \frac{dS}{v(\mathbf{k})} (1 + V_i(\mathbf{k}) \tilde{\partial}_i \\ &\quad + V_{ij}(\mathbf{k}) \tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_j + V_{ijl}(\mathbf{k}) \tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_j \tilde{\partial}_l + \dots) \\ &\quad \cdot \frac{1}{(2\pi)^2 |2\omega|} \Delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (33)$$

Die Anwendung der Gln. (27), (28), (29), (30) in Verbindung mit Gl. (32) führt nun insgesamt zu folgenden Resultaten:

$$\left\{ \begin{array}{l} = 0, \text{ falls } \mu \text{ ungerade} \\ \quad [\text{nach Gl. (29)}], \\ = 0, \text{ falls } \mu \text{ gerade und die } s_j \\ \quad \text{einander nicht paarweise} \\ \quad \text{gleich sind} \\ \quad [\text{nach Gl. (27)}], \\ \text{bleibt konstant, wenn man die} \\ \quad \text{Indizes (1, 2, 3) durch} \\ \quad \text{eine beliebige Permuta-} \\ \quad \text{tion (P1, P2, P3) ersetzt} \\ \quad [\text{nach Gln. (28), (30)}]. \end{array} \right.$$

Damit läßt sich Gl. (33) weiterbehandeln. Bricht man die Entwicklung auf der rechten Seite mit dem quadratischen Glied ab, so ist

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}) &= \frac{g T}{(2\pi)^2} \sum_{\omega} \frac{1}{2|\omega|} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} \\ &\quad (1 + V_{11}(\mathbf{k}) (\tilde{\partial} \cdot \tilde{\partial})) \Delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (34)$$

Setzt man für die Termdichte an der Fermi-Kante

$$N := \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})}$$

und berücksichtigt man die Beziehung

$$1 - 2\pi T N g \sum_{\omega} 1/2|\omega| = N g \log(T/T_c),$$

so folgt aus Gl. (34):

$$(\tilde{\partial} \cdot \tilde{\partial}) \Delta(\mathbf{r}) = -2 e H_{c2}^{(0)}(T) \Delta(\mathbf{r}).$$

Dabei ist

$$2 e H_{c2}^{(0)}(T) := \left[2\pi T \sum_{\omega} \frac{1}{2|\omega|} a_{\omega} \right]^{-1} \log(T_c/T),$$

$$a_{\omega} := \frac{1}{(2\pi)^3 N} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} V_{11}(\mathbf{k}).$$

Mit diesen Umformungen, den obigen Symmetriebeziehungen und den Vertauschungsrelationen

$$[\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_j] = 2i e H_l \quad (i, j, l \text{ zyklisch})$$

läßt sich Gl. (33) auf die Gestalt bringen:

$$-2 e H_{c2}^{(0)}(T) \Delta(\mathbf{r}) = (\tilde{\partial} \cdot \tilde{\partial}) \Delta(\mathbf{r}) + \left[\sum_{\omega} \frac{1}{2|\omega|} a_{\omega} \right]^{-1} \left[\sum_{\omega} \frac{1}{2|\omega|} (b_{\omega} (\tilde{\partial} \cdot \tilde{\partial})^2 + d_{\omega} (2 e H)^2 - c_{\omega} (\tilde{\partial}_1^4 + \tilde{\partial}_2^4 + \tilde{\partial}_3^4) + \dots) \Delta(\mathbf{r}) \right] \quad (35)$$

Dabei ist

$$b_{\omega} := \frac{1}{(2\pi)^3 N} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} (V_{1122}(\mathbf{k}) + V_{1212}(\mathbf{k}) + V_{1221}(\mathbf{k})),$$

($= 2 e H$), somit ergibt sich aus den Gln. (35), (36):

$$-2 e H_{c2}^{(0)}(T) = -2 e H + \left[\sum_{\omega} \frac{1}{2|\omega|} a_{\omega} \right]^{-1} \left[\sum_{\omega} \frac{1}{2|\omega|} (b_{\omega} (2 e H)^2 + d_{\omega} (2 e H)^2 - c_{\omega} \langle 00 | \tilde{\partial}_1^4 + \tilde{\partial}_2^4 + \tilde{\partial}_3^4 | 00 \rangle) \right].$$

In der eckigen Klammer darf man H_{c2} durch $H_{c2}^{(0)}(T)$ oder \bar{H}_{c2} ersetzen, dabei ist H_{c2} der über alle Richtungen von \mathbf{H} erstreckte Mittelwert von H_{c2} . Mit den Richtungskosinus α, β, γ von \mathbf{H} folgt:

$$\frac{H_{c2} - \bar{H}_{c2}}{H_{c2}} = \frac{\log(T_c/T)}{2\pi T} \cdot \frac{3}{2} \frac{\sum \frac{1}{2|\omega|} c_{\omega}}{\left[\sum \frac{1}{2|\omega|} a_{\omega} \right]^2} (\alpha^2 \beta^2 + \beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2 - \frac{1}{3}) \quad (37)$$

Beispiel 1: Die idealisierte Annahme totaler Rückwärtstreuung läßt sich in der Form

$$\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sigma(\mathbf{k}) \delta_F(\mathbf{k}, -\mathbf{k}')$$

darstellen. Dabei ist $\delta_F(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ die Delta-Funktion auf der Fermi-Fläche, d. h. für jede von \mathbf{k} ($|\mathbf{k}| = k_F$) abhängige stetige Funktion $f(\mathbf{k})$ gilt:

$$\int f(\mathbf{k}') \delta_F(\mathbf{k}, \mathbf{k}') dS' = f(\mathbf{k}).$$

Verlangt man vereinfachend noch

$$v(\mathbf{k}) \sigma(\mathbf{k}) = s = \text{const}, \quad (38)$$

so folgt nach einigen Nebenrechnungen:

$$\frac{\sum \frac{1}{2|\omega|} c_{\omega}}{\left[\sum \frac{1}{2|\omega|} a_{\omega} \right]^2} = \frac{c}{a^2} \frac{\sum \frac{1}{(2|\omega|)^3} (2|\omega| + 2ns)^2}{\left[\sum \frac{1}{(2|\omega|)^2} \frac{1}{2|\omega| + 2ns} \right]^2}$$

mit

$$a := \frac{1}{(2\pi)^3 N} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} v_1^2(\mathbf{k}),$$

$$c := \frac{1}{(2\pi)^3 N} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} (3 v_1^2(\mathbf{k}) v_2^2(\mathbf{k}) - v_1^4(\mathbf{k})).$$

$$c_{\omega} := \frac{1}{(2\pi)^3 N} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} (V_{1122}(\mathbf{k}) + V_{1212}(\mathbf{k}) + V_{1221}(\mathbf{k}) - V_{1111}(\mathbf{k})),$$

$$d_{\omega} := \frac{1}{(2\pi)^3 N} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} (V_{1212}(\mathbf{k}) + 2 V_{1221}(\mathbf{k})).$$

Die weitere Berechnung von H_{c2} geschieht störungstheoretisch. Dazu betrachte man den auf der rechten Seite von Gl. (35) auf $\Delta(\mathbf{r})$ wirkenden Operator \mathbf{L} . Da $H_{c2}^{(0)}(T)$ die niedrigste Näherung von H_{c2} ist, erhält man das kritische Magnetfeld in höherer Näherung, indem man die Gleichung

$$-2 e H_{c2}^{(0)}(T) = \langle 00 | \mathbf{L} | 00 \rangle =: L(T, \mathbf{H}) \quad (36)$$

nach H auflöst. Dabei ist $|00\rangle$ die normierte Eigenfunktion von $-\tilde{\partial} \cdot \tilde{\partial}$ mit niedrigstem Eigenwert

Beispiel 2: Die Symmetriebeziehungen (17) seien durch die zusätzlichen Forderungen

$$\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sigma(\mathbf{k}, \mathbf{A} \mathbf{k}') \quad (39)$$

(die in Beispiel 1 nicht erfüllt sind) ergänzt. In diesem Fall „verallgemeinerter Isotropie“ erhält man [mit Gl. (38)]:

$$\frac{\sum \frac{1}{2|\omega|} c_{\omega}}{\left[\sum \frac{1}{2|\omega|} a_{\omega} \right]^2} = \frac{c}{a^2} \frac{\sum \frac{1}{(2|\omega|)^2} \frac{1}{(2|\omega| + ns)^3}}{\left[\sum \frac{1}{(2|\omega|)^2} \frac{1}{2|\omega| + ns} \right]^2}. \quad (40)$$

In beiden Beispielen ist die Amplitude der Anisotropie von H_{c2} eine streng monoton fallende Funktion von n .

Der in Beispiel 2 betrachtete Spezialfall enthält den Ansatz

$$\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{P}{v(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}')} \quad (P = \text{const}), \quad (41)$$

$$s = \sigma(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}) = (2\pi)^3 N P.$$

Der Vergleich mit Gl. (13) zeigt, daß $P = P(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ ist (vgl. Abschn. 1). Der Ansatz (41) kann also als niedrigste Näherung für die wirkliche Übergangswahrscheinlichkeit $P(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ in einer systematischen Entwicklung angesehen werden. Da P von \mathbf{k}, \mathbf{k}' unabhängig ist, gilt diese Aussage offensichtlich auch für den Fall, daß die Symmetriebeziehungen (39) nicht erfüllt sind. Aus diesem Grunde ist es gerechtfertigt, durch Gl. (41) die sinngemäße Verallgemeinerung des Begriffs „isotrope Streuung“ für nicht-sphärische Fermi-Flächen zu definieren.

Beachtet man die einschränkende Voraussetzung $T \lesssim T_c$, so ist das in den Gln. (37), (40) definierte Ergebnis mit dem von Hohenberg und Werthamer angegebenen Resultat³ identisch.

3. Anisotropie von H_{c2} im sauberen Supraleiter (höhere Näherung)

Im Sonderfall $n=0$ lauten die Gln. (15), (16)

$$\Delta(\mathbf{r}) = g T \sum_{\omega} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} \Delta_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{k}), \quad (42)$$

$$(2|\omega| + \mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\partial}) \Delta_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \Delta(\mathbf{r}). \quad (43)$$

Der Ansatz (18), (19), (20) für $\Delta_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ ergibt, in Gl. (42) eingesetzt:

$$\Delta(\mathbf{r}) = g T \sum_{\omega} \frac{1}{(2\pi)^2 2|\omega|} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(-\frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\partial}}{2|\omega|} \right)^{\mu} \Delta(\mathbf{r}).$$

Ähnliche Umformungen wie bei der Ableitung von Gl. (35) führen schließlich auf (höhere Glieder werden vernachlässigt: $T \lesssim T_c$):

$$2e H_{c2}^{(0)}(T) \Delta(\mathbf{r}) = (\mathbf{L}^{(0)} + \mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)}) \Delta(\mathbf{r}). \quad (44)$$

Dabei ist jetzt

$$2e H_{c2}^{(0)}(T) := \frac{(1/2\pi T) \log(T_c/T)}{a \sum (1/2|\omega|)^3},$$

$$\mathbf{L}^{(0)} := -\tilde{\partial} \cdot \tilde{\partial},$$

$$\mathbf{L}^{(1)} := -\frac{\sum \frac{1}{(2|\omega|)^5} \frac{1}{(2\pi)^3 N} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} (\mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\partial})^4}{a \sum \left(\frac{1}{2|\omega|} \right)^3}, \quad (45)$$

$$\mathbf{L}^{(2)} := -\frac{\sum \frac{1}{(2|\omega|)^7} \frac{1}{(2\pi)^3 N} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} (\mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\partial})^6}{a \sum \left(\frac{1}{2|\omega|} \right)^3}. \quad (46)$$

Falls T hinreichend nahe bei T_c liegt, darf $\mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)}$ als Störung von $\mathbf{L}^{(0)}$ angesehen werden. Das Spektrum von $\mathbf{L}^{(0)}$ ersieht man aus (die z' -Achse liegt parallel zum Magnetfeld):

$$\begin{aligned} -\tilde{\partial} \cdot \tilde{\partial} |n l\rangle &= L_{nl} |n l\rangle, & \langle l n | n l\rangle &= 1, \\ L_{nl} &= (2n+1) 2eH + l^2, & (47) \\ |n l\rangle &= \left(\frac{2eH}{\pi} \right)^{1/4} (2^n n!)^{-1/2} e^{ilz'} e^{-eHx'^2} \\ & & H_n(\sqrt{2eH} x'). \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Diagonalität von $\mathbf{L}^{(1)}, \mathbf{L}^{(2)}$ bezüglich verschiedener l -Zustände, so ergibt sich aus Gl. (44) mit Hilfe der Störungstheorie

$$\begin{aligned} 2e H_{c2}^{(0)}(T) &= L_{00} + \langle 00 | \mathbf{L}^{(1)} | 00 \rangle \\ &+ \langle 00 | \mathbf{L}^{(2)} | 00 \rangle + \sum_n' \frac{|\langle 00 | \mathbf{L}^{(1)} | n0 \rangle|^2}{L_{00} - L_{n0}}. \end{aligned} \quad (48)$$

Das gesuchte kritische Magnetfeld $H_{c2}(\alpha, \beta, \gamma, T)$ erhält man, wenn Gl. (48) nach H aufgelöst wird.

Aus Symmetriegründen läßt sich ansetzen

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3 N} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} (\mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\partial})^4 &= [b(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - c\delta_{ijkl}] \tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_j \tilde{\partial}_k \tilde{\partial}_l, \\ \frac{1}{(2\pi)^3 N} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} (\mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\partial})^6 &= [d(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln} + \dots (15 \text{ Summanden})) \\ &+ e(\delta_{ijkl}\delta_{mn} + \delta_{ijkm}\delta_{ln} + \dots (15 \text{ Summanden})) \\ &+ f\delta_{ijklmn}] \tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_j \tilde{\partial}_k \tilde{\partial}_l \tilde{\partial}_m \tilde{\partial}_n. \end{aligned}$$

Die auftretenden Koeffizienten bestimmen sich zu

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{(2\pi)^3 N} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} v_1^2(\mathbf{k}) v_2^2(\mathbf{k}), & -c &= \frac{1}{(2\pi)^3 N} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} v_1^4(\mathbf{k}) - 3b, \\ d &= \frac{1}{(2\pi)^3 N} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} v_1^2(\mathbf{k}) v_2^2(\mathbf{k}) v_3^2(\mathbf{k}), & e &= \frac{1}{(2\pi)^3 N} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} v_1^4(\mathbf{k}) v_2^2(\mathbf{k}) - 3d, \\ f &= \frac{1}{(2\pi)^3 N} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} v_1^6(\mathbf{k}) - 15d - 15e. \end{aligned}$$

Auf Grund dieser Beziehungen lassen sich die folgenden Abschätzungen angeben. Spitze Klammern bedeuten Mittelung über die Fermi-Fläche:

$$\begin{aligned} \langle f \rangle &:= \frac{1}{(2\pi)^3 N} \int \frac{dS}{v(\mathbf{k})} f(\mathbf{k}), & 0 \leq b \leq \frac{1}{9} \langle v^4 \rangle, \\ -\frac{1}{3} \langle v^4 \rangle &\leq c \leq \frac{2}{9} \langle v^4 \rangle, & c \leq 2b \quad (\text{Cauchy-Schwarz}), \\ 0 &\leq d \leq \frac{1}{27} \langle v^6 \rangle, \\ -\frac{2}{27} \langle v^6 \rangle &\leq e \leq \frac{1}{24} \langle v^6 \rangle, & -e \leq 2d \\ -\frac{13}{24} \langle v^6 \rangle &\leq f \leq \frac{1}{27} \langle v^6 \rangle, & -f \leq 12d + 14e \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\int} \right\} (\text{Cauchy-Schwarz}).$$

Mit der Formel (ω läuft der Einfachheit halber bis ∞)

$$\sum_{\omega} \left(\frac{1}{2|\omega|} \right)^{\alpha} = \frac{2}{(2\pi T)^{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{\alpha}} = \frac{1}{(\pi T)^{\alpha}} \frac{2^{\alpha}-1}{2^{2\alpha-1}} \zeta(\alpha) \quad (\alpha > 1)$$

und den Definitionen

$$\begin{aligned} \sigma &:= \left\{ \frac{31}{7 \cdot 16} \frac{\zeta(5)}{\zeta(3)} \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\langle v^2 \rangle} \right\} \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \\ a \end{pmatrix} \\ \tau &:= \left\{ \frac{31}{7 \cdot 16} \frac{\zeta(5)}{\zeta(3)} \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\langle v^2 \rangle} \right\} \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \\ a \end{pmatrix} \\ \kappa &:= \left\{ \frac{127}{7 \cdot 256} \frac{\zeta(7)}{\zeta(3)} \frac{1}{\pi^4} \frac{1}{\langle v^2 \rangle^2} \right\} \frac{d}{a} \\ \lambda &:= \left\{ \frac{127}{7 \cdot 256} \frac{\zeta(7)}{\zeta(3)} \frac{1}{\pi^4} \frac{1}{\langle v^2 \rangle^2} \right\} \frac{e}{a} \\ \mu &:= \left\{ \frac{127}{7 \cdot 256} \frac{\zeta(7)}{\zeta(3)} \frac{1}{\pi^4} \frac{1}{\langle v^2 \rangle^2} \right\} \frac{f}{a} \end{aligned}$$

erhält man nach Anwendung der bekannten Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(1)} &= \frac{\langle v^2 \rangle}{T^2} \left(-3\sigma [(\tilde{\partial} \cdot \tilde{\partial})^2 + (2eH)^2] + \tau \left(\sum_{\mathbf{k}} \tilde{\partial}_{\mathbf{k}}^4 \right) \right) \\ \mathbf{L}^{(2)} &= \frac{-15\kappa \langle v^2 \rangle^2}{T^4} [(\tilde{\partial} \cdot \tilde{\partial})^3 + 5(2eH)^2 (\tilde{\partial} \cdot \tilde{\partial}) - 2(2e\mathbf{H} \cdot \tilde{\partial})^2] - \frac{\mu \langle v^2 \rangle^2}{T^4} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\partial}_{\mathbf{k}}^6 \\ &\quad - \frac{15\lambda \langle v^2 \rangle^2}{T^4} \left[\sum_{\mathbf{k}} \tilde{\partial}_{\mathbf{k}}^4 (\tilde{\partial} \cdot \tilde{\partial}) - 4 \sum_{\substack{klm \\ \text{zyklisch}}} 2ieH_{\mathbf{k}} (\tilde{\partial}_l^3 \tilde{\partial}_m - \tilde{\partial}_m^3 \tilde{\partial}_l) - 3(2eH)^2 (\tilde{\partial} \cdot \tilde{\partial}) + 3 \sum_{\mathbf{k}} (2eH_{\mathbf{k}})^2 \tilde{\partial}_{\mathbf{k}}^2 \right]. \end{aligned}$$

Daraus errechnet man:

$$L_{00} = 2eH, \quad \langle 00 | \mathbf{L}^{(1)} | 00 \rangle = \frac{(2eH)^2 \langle v^2 \rangle}{T^2} (-6\sigma + \frac{3}{4}\tau(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + 1)), \quad (49, 50)$$

$$\sum_n' \frac{|\langle 0n | \mathbf{L}^{(1)} | 00 \rangle|^2}{L_{00} - L_{n0}} = -\frac{3}{16} (2eH) \left(\frac{2eH \langle v^2 \rangle \tau}{T^2} \right)^2 (6|A(\alpha, \beta, \gamma)|^2 + |B(\alpha, \beta, \gamma)|^2), \quad (51)$$

$$\langle 00 | \mathbf{L}^{(2)} | 00 \rangle = \frac{(2eH)^3 \langle v^2 \rangle^2}{T^4} \left(90\kappa + \frac{135}{4}\lambda(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + 1) + \frac{15}{8}\mu((1-\alpha^2)^3 + (1-\beta^2)^3 + (1-\gamma^2)^3) \right).$$

Dabei wurde zur Abkürzung gesetzt

$$\begin{aligned} |A(\alpha, \beta, \gamma)|^2 &= (1-\alpha^2)^4 + (1-\beta^2)^4 + (1-\gamma^2)^4 + 2(\alpha^4\beta^4 + \beta^4\gamma^4 + \gamma^4\alpha^4) - 2(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4), \\ |B(\alpha, \beta, \gamma)|^2 &= (1-\alpha^2)^4 + (1-\beta^2)^4 + (1-\gamma^2)^4 + 2(\alpha^4\beta^4 + \beta^4\gamma^4 + \gamma^4\alpha^4) + 2(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) - 36\alpha^2\beta^2\gamma^2. \end{aligned} \quad (52)$$

Das in Abschn. 2 a) beschriebene Verfahren zur Berechnung von H_{c2} läßt sich dahingehend interpretieren, daß in der Lückengleichung [Gl. (1)] die Funktionen $K_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ und $\Delta(\mathbf{r})$ beide näherungsweise berechnet werden. Der Ausdruck (51) stellt dann gerade den Beitrag zu $L(T, \mathbf{H})$ dar, der von der Korrektur des Paarpotentials herrührt. Es ist offensichtlich, daß dieser Beitrag nicht vernachlässigt werden darf, solange man nicht nähere Einzelheiten über die relative Größe der Parameter $\sigma, \tau, \kappa, \lambda, \mu$ weiß. Insofern ist die approximative Berechnung von H_{c2} im ganzen Temperaturbereich $0 \leq T \leq T_c$ mit Hilfe des ungestörten Paarpotentials ($=|00\rangle$), auch unter der Annahme, die Anisotropie von H_{c2} sei klein, problematisch³.

Trägt man die Zwischenresultate (49), (50), (51), (52) in Gl. (48) ein, so ergibt sich die Beziehung

$$\frac{2 e H_{c2}^{(0)}(T) \langle v^2 \rangle}{T^2} = \frac{2 e H \langle v^2 \rangle}{T^2} + a_2 \left(\frac{2 e H \langle v^2 \rangle}{T^2} \right)^2 + a_3 \left(\frac{2 e H \langle v^2 \rangle}{T^2} \right)^3,$$

wobei a_2 , a_3 symmetrische Polynome in α , β , γ sind. Löst man nach H auf, so ergibt sich näherungsweise

$$H_{c2}(\alpha, \beta, \gamma, T) = H_{c2}^{(0)}(T) \left(1 + C_1(\alpha, \beta, \gamma) \frac{2 e H(T) \langle v^2 \rangle}{T^2} + C_2(\alpha, \beta, \gamma) \left(\frac{2 e H_{c2}^{(0)}(T) \langle v^2 \rangle}{T^2} \right)^2 \right).$$

Die Winkelabhängigkeit von $C_1(\alpha, \beta, \gamma)$, $C_2(\alpha, \beta, \gamma)$ drückt man üblicherweise durch Würfelfunktionen aus. Die Entwicklung lautet:

$$C_1(\alpha, \beta, \gamma) = 6\sigma - \frac{6}{5}\tau - \frac{3}{4}\tau H_4,$$

$$C_2(\alpha, \beta, \gamma) = 72\sigma^2 - \frac{72}{5}\sigma\tau + \frac{193}{56}\tau^2 - 90\kappa - 54\lambda - \frac{18}{7}\mu + H_4 \left(-9\sigma\tau + \frac{765}{176}\tau^2 - \frac{135}{4}\lambda - \frac{135}{44}\mu \right) + H_6 \left(-\frac{131}{40}\tau^2 + \frac{15}{8}\mu \right) + H_8 \cdot \frac{39}{8}\tau^2.$$

Dabei wurde gesetzt ⁶:

$$H_4 = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - \frac{3}{5},$$

$$H_6 = \alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 - \frac{15}{11}H_4 - \frac{3}{7} \quad \left(= 3(\alpha^2\beta^2\gamma^2 + \frac{1}{2}H_4 - \frac{1}{105}) \right),$$

$$H_8 = \alpha^8 + \beta^8 + \gamma^8 - \frac{28}{15}H_6 - \frac{210}{143}H_4 - \frac{1}{3}.$$

Abschließend sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß diese Näherung höherer Ordnung auch einen Term $\sim H_8$ enthält, der, jedenfalls solange man keine näheren Einzelheiten über die auftretenden Anisotropie-Parameter σ , τ , λ , μ kennt, gleichberechtigt mit Termen $\sim H_4$, $\sim H_6$ zu $C_2(\alpha, \beta, \gamma)$ beiträgt. Das kann bedeuten, daß sich gemessene kritische Magnetfelder durch einen Approximationsansatz in der Form

$$H_{c2} = c_0 + c_4 H_4 + c_6 H_6$$

nur schlecht interpolieren lassen, weil — im Sinne der störungstheoretischen Näherung — diese Entwicklung unvollständig ist ^{1, 2}. Da mir genauere Meßwerte für die Anisotropie von H_{c2} leider nicht zugänglich waren ², konnte die Relevanz dieser Bemerkung nicht weiter geprüft werden.

Herrn Professor LÜDERS möchte ich für seine hilfreichen Anregungen und Hinweise während des Fortgangs dieser Arbeit herzlich danken.

⁶ F. C. VON DER LAGE u. H. A. BETHE, Phys. Rev. **71**, 612 [1947].